MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO

1. El Modelo AK

El comportamiento de los hogares

Nota: voy a denotar las variables cambiantes en el tiempo de esta forma: x_t*, en lugar de x(t) como correspondería a un modelo en tiempo continuo.*

Problema del hogar:

$$\underset{\{c_t\}}{Max} \int_0^\infty e^{-(\rho-n)t}\left(\frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta}\right)dt \qquad \rho>0,\ \theta>0$$

sujeto a: $\dot{a}_t=(r_t-n)a_t-c_t$ (1)

dado a_0

Solución de este problema:

$$H = e^{-(\rho-n)t}\left[\left(\frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta}\right)+\lambda_t\big((r_t-n)a_t-c_t\big)\right]$$

Sea $\mu_t \equiv \lambda_t e^{-(\rho-n)t} \Rightarrow \dot{\mu}_t = e^{-(\rho-n)t}\left(\dot{\lambda}_t-(\rho-n)\lambda_t\right).$

$CPO:$

$$\frac{\partial H}{\partial c_t}=0 \rightarrow c_t^{-\theta}=\lambda_t \Rightarrow -\theta\frac{\dot{c}_t}{c_t}=\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} \tag{2}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial a_t}=\dot{\mu}_t=e^{-(\rho-n)t}\left(\dot{\lambda}_t-(\rho-n)\lambda_t\right)\rightarrow$$

$$-e^{-(\rho-n)t}\lambda_t(r_t-n)=e^{-(\rho-n)t}\left(\dot{\lambda}_t-(\rho-n)\lambda_t\right)\Rightarrow$$

$$-\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}=r_t-n. \tag{3}$$

$$\lim_{t\to\infty} a_t\ e^{-\int_0^t (r_s-n)ds}=0. \tag{4}$$

Por tanto, las condiciones de optimalidad son:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t}=\frac{1}{\theta}(r_t-\rho). \tag{5}$$

$$\dot{a}_t=(r_t-n)a_t-c_t \tag{6}$$

junto con (4).

El comportamiento de las empresas

$$\underset{k_t}{Max} \quad f(k_t) - (r-\delta)k_t$$

$$\text{sujeto a:} \quad f(k_t) = Ak_t \tag{7}$$

CPO:

$$r_t = A - \delta \Rightarrow r = A - \delta \tag{8}$$

El equilibrio

Dado que esta economía es cerrada, en equilibrio debe ocurrir que $a_t = k_t$.

Def. *Un equilibrio consiste en unas asignaciones* $\{c_t, a_t, k_t\}$ *y unos precios* $\{r_t\}$ *tales que:*

a) $\{c_t, a_t\}$ *resuelven el problema del hogar, dado* $\{r_t\}$ *;*

b) $\{k_t\}$ *resuelve el problema de la empresa dado* $\{r_t\}$ *;*

c) Los mercados se vacían$\Rightarrow k_t = a_t$, *es decir*

$$\underbrace{c_t}_{\text{Consumo}} + \underbrace{\dot{k}_t - (n+\delta)k_t}_{\text{Inversión}} = \underbrace{Ak_t}_{\text{Producto}}$$

En definitiva, las condiciones de optimalidad del problema son (sustituyendo (8) y $k_t = a_t$ en (4)-(6)) :

$$c_t + \dot{k}_t - (n+\delta)k_t = Ak_t \tag{9}$$

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\theta}(A - \delta - \rho) \tag{10}$$

$$\lim_{t\to\infty} k_t \; e^{-(A-\delta-n)t} = 0. \tag{11}$$

Es fácil ver de (10) que es una ecuación diferencial en la variable c_t, con parámetros constantes, cuya solución es:

$$c_t = c(0)\; e^{\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)t} \tag{12}$$

Supondremos que el crecimiento del consumo es positivo, es decir, $A > \delta + \rho$. Además supondremos que la *suma* de utilidades descontada está limitada o acotada, es decir, el consumo no puede crecer más rápido que el descuento:

$$\int_0^\infty e^{-(\rho-n)t}\,\frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta}dt<\infty \Rightarrow \int_0^\infty e^{-(\rho-n)t}(c_t^{1-\theta}-1)dt<\infty$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-(\rho-n)t}c_t^{1-\theta}dt-\underbrace{\int_0^\infty e^{-(\rho-n)t}dt}_{\infty>(\rho-n)^{-1}>0}<\infty$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-(\rho-n)t}c_t^{1-\theta}dt<\infty$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-\left[(\rho-n)-\frac{1-\theta}{\theta}(A-\delta-\rho)\right]t}c_0^{1-\theta}dt<\infty$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{c_0\in(0,\infty)} \int_0^\infty e^{-\left[(\rho-n)-\frac{1-\theta}{\theta}(A-\delta-\rho)\right]t}dt<\infty$$

$$\Rightarrow (\rho-n)-\frac{1-\theta}{\theta}(A-\delta-\rho)>0$$

esto es, la “condición de utilidad acotada o limitada”.

En definitiva, existe solución con crecimiento del consumo positivo si

$$A>\rho+\delta>\frac{1-\theta}{\theta}(A-\delta-\rho)+n+\delta$$

Dinámica de transición

Ahora demostramos que el modelo carece de dinámica de transición, y calculamos el valor óptimo del consumo inicial. Con esto tendremos resuelto analíticamente el problema:
Sustituyendo (12) en (9) tenemos:

$$\dot{k}_t = (A-\delta-n)k_t - c_0\, e^{\gamma_c t}, \text{ donde } \gamma_c = \frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)$$

La solución a esta ecuación es (ver apéndice 1):

$$k_t = \left[k_0 - \frac{c_0}{(A-\delta-n)-\gamma_c} \right] e^{(A-\delta-n)t} + \frac{c_0}{(A-\delta-n)-\gamma_c} e^{\gamma_c t},$$

donde $(A-\delta-n)-\gamma_c > 0$ por la condición de "utilidad acotada o limitada".

Si sustituimos esta expresión en la condición de transversalidad (11) tenemos:

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\left[k_0-\frac{c_0}{(A-\delta-n)-\gamma_c}\right]+\frac{c_0}{(A-\delta-n)-\gamma_c}e^{[\gamma_c-(A-\delta-n)]t}\right\}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty}\left[k_0-\frac{c_0}{(A-\delta-n)-\gamma_c}\right]+\frac{c_0}{(A-\delta-n)-\gamma_c}\underbrace{\lim_{t\to\infty}e^{[\gamma_c-(A-\delta-n)]t}}_{=0\text{ porque }\gamma_c-(A-\delta-n)<0}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty}\left[k_0-\frac{c_0}{(A-\delta-n)-\gamma_c}\right]=0$$

Para que se satisfaga esta expresión, tiene que cumplirse que el consumo inicial óptimo sea:

$$c_0=\left[(A-\delta-n)-\gamma_c\right]k_0 \qquad (13)$$

Por tanto, la solución al problema es:

Dado k_0 y $\gamma_c=\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)$:

$$k_t=k_0\,e^{[\gamma_c]t},$$

$$c_t=\left[(A-\delta-n)-\gamma_c\right]k_t=\left[(A-\delta-n)-\gamma_c\right]k_0e^{[\gamma_c]t},$$

$$y_t=Ak_0\,e^{[\gamma_c]t},$$

$$s=\frac{\dot{k}_t+\delta k_t}{y_t}=\frac{\gamma_c+\delta}{A}$$

Todas las variables que crecen lo hacen a la misma tasa constante.

El problema del planificador

$$\underset{\{c_t\}}{Max} \int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t} \left(\frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right) dt$$

$$\text{sujeto a: } \quad \dot{k}_t = Ak_t - (\delta + n)k_t - c_t$$

$$\text{dado } \quad k_0$$

Puede demostrarse que las condiciones de optimalidad son:

$$c_t + \dot{k}_t - (n+\delta)k_t = Ak_t \tag{14}$$

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\theta}(A - \delta - \rho) \tag{15}$$

$$\lim_{t \to \infty} k_t \ e^{-(A-\delta-n)t} = 0. \tag{16}$$

Estas condiciones son las mismas que obteníamos en el equilibrio competitivo. Por tanto, podemos decir que el equilibrio competitivo es óptimo y que podemos encontrar unos precios (unos tipos de interés y un precio sombra o variable de coestad0) tales que la solución del planificador coincida con el equilibrio competitivo. En definitiva, se satisfacen los dos teoremas del bienestar.

Apéndice 1

*Solución de la ecuación homogénea $\left[\dot{k}_t = (A-\delta-n)k_t\right]$:

$k_t = B\, e^{(A-\delta-n)t}$, donde B es una constante arbitraria.

*Una solución particular: $k_t = D\, e^{\gamma_c t} \Rightarrow \dot{k}_t = \gamma_c D\, e^{\gamma_c t}$:

Sustituyendo esta solución particular en $\dot{k}_t = (A-\delta-n)k_t - c_0 e^{\gamma_c t}$

se tiene que $D = \dfrac{c_0}{A-\delta-n-\gamma_c}$.

Nótese que, por la condición de utilidad limitada: $A-\delta-n-\gamma_c > 0$.

*Solución general (sumando la solución a la ec. homogénea y la solución particular):

$$k_t = B\, e^{(A-\delta-n)t} + \frac{c_0}{A-\delta-n-\gamma_c} e^{\gamma_c t}.$$

*Solución completa: teniendo en cuenta que $k(0) = k_0$, dado:

entonces $B = k_0 - \dfrac{c_0}{A-\delta-n-\gamma_c}$.

Por tanto, la solución es:

$$k_t = \left[k_0 - \frac{c_0}{A-\delta-n-\gamma_c} \right] e^{(A-\delta-n)t} + \frac{c_0}{A-\delta-n-\gamma_c} e^{\gamma_c t}$$

MODELO DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON ACUMULACIÓN DE CAPITAL HUMANO

(Notas basadas en el libro de R. Barro y X. Sala-i-Martin: Economic Growth, de MIT Press)

1. El comportamiento de los hogares

(Nota: suponemos, sin pérdida de generalidad, que no hay crecimiento poblacional, es decir, n=0; además, utilizaré como notación x_t para aquellas variables que cambian con el tiempo en lugar de x(t), que es la notación usual para las modelizaciones en tiempo continuo).

El problema al que se enfrentan el hogar representativo es (suponemos que el sector productor del capital humano no tiene mercado explícito):

$$\underset{\{c_t, u_t\}}{Max} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt, \quad \rho > 0, \theta > 0$$

sujeto a: $\dot{a}_t = r_t a_t + w_t u_t h_t - c_t$ (1)

$$\dot{h}_t = B(1-u_t)h_t - \delta_h h_t \qquad (2)$$

dados a_0, h_0

El Hamiltoniano asociado a este problema es:

$$H = e^{-\rho t}\left[\frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \lambda_{1,t}\left(r_t a_t + w_t u_t h_t - c_t\right) + \lambda_{2,t}\left(B(1-u_t)h_t - \delta_h h_t\right)\right]$$

Sea $\mu_{i,t} \equiv e^{-\rho t}\lambda_{i,t}, i = 1,2 \Rightarrow \dot{\mu}_{i,t} \equiv e^{-\rho t}\left(\dot{\lambda}_{i,t} - \rho\lambda_{i,t}\right), i = 1,2.$

Las Condiciones de Primer Orden (CPO) son:

$$\frac{\partial H}{\partial c_t} = 0 \rightarrow c_t^{-\theta} = \lambda_{1,t} \Rightarrow \frac{\dot{\lambda}_{1,t}}{\lambda_{1,t}} = -\theta \frac{\dot{c}_t}{c_t} \tag{3}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_t} = 0 \rightarrow \underbrace{\frac{\lambda_{2,t}}{\lambda_{1,t}}}_{\substack{\text{precio del} \\ \text{capital humano} \\ \text{relativo al precio} \\ \text{del bien final}}} = \underbrace{\frac{w_t}{B}}_{\substack{\text{Ratio de} \\ \text{productividades} \\ \text{marginales del input} \\ \text{trabajo efectivo de} \\ \text{cada sector}}} \tag{4}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial k_t} = \dot{\mu}_{1,t} \rightarrow -\lambda_{1,t}(r_t - \rho) = \dot{\lambda}_{1,t} \tag{5}$$

Nótese que de (3) y de (5) obtenemos la típica condición de Euler:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\theta}(r_t - \rho) \tag{6}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial h_t} = \dot{\mu}_{2,t} \rightarrow -\lambda_{2,t}(B - \delta_h - \rho) = \dot{\lambda}_{2,t} \tag{7}$$

junto con las condiciones de transversalidad:

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\rho t} \lambda_{1,t} a_t = 0$$

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\rho t} \lambda_{2,t} h_t = 0$$

2. Las empresas

El problema de la empresa representativa es:

$$\underset{\{k_t,\tilde{h}_t\}}{Max}\ \underbrace{Ak_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{1-\alpha}}_{y_t}-w_t\tilde{h}_t-(r_t+\delta)k_t,\ \text{(en eq. } \tilde{h}_t=u_th_t\text{)}$$

Las CPO de este problema son:

$$w_t=(1-\alpha)Ak_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{-\alpha}=(1-\alpha)Ak_t^{\alpha}(u_th_t)^{-\alpha} \qquad (8)$$

$$r_t+\delta=\alpha Ak_t^{\alpha-1}\tilde{h}_t^{1-\alpha}=\alpha Ak_t^{\alpha-1}(u_th_t)^{1-\alpha} \qquad (9)$$

3. El equilibrio competitivo

Un equilibrio competitivo es un conjunto de asignaciones $\left\{c_t,u_t,a_t,k_t,h_t,\tilde{h}_t\right\}$ *y un conjunto de precios* $\{r_t,w_t\}$ *tales que:*

i) *Las asignaciones* $\{c_t,u_t,a_t,h_t\}$ *resuelven el problema del hogar representativo dados los precios* $\{r_t,w_t\}$.

ii) *Las asignaciones* $\left\{k_t,\tilde{h}_t\right\}$ *resuelven el problema de la empresa dados los precios* $\{r_t,w_t\}$.

iii) *Los mercados se vacían:* $\tilde{h}_t=u_th_t$ *,* $a_t=h_t$*, es decir, usando estas igualdades junto con (8) y (9) en la restricción presupuestaria (1) se obtiene la restricción de recursos de la economía:*

$$\underbrace{c_t}_{\text{consumo}}+\underbrace{\dot{k}_t+\delta k_t}_{\text{inversión bruta}}=\underbrace{Ak_t^{\alpha}(u_th_t)^{1-\alpha}}_{\text{output}}$$

Una medida amplia o extendida del output de esta economía se obtiene agregando a la producción del bien final la acumulación de capital humano valorado a través de su precio en términos relativos del precio del bien final:

$$Q_t = Ak_t^{\alpha}(u_t h_t)^{1-\alpha} + \frac{\lambda_{2,t}}{\lambda_{1,t}} B(1-u_t)h_t$$

$$= Ak_t^{\alpha}(u_t h_t)^{1-\alpha} + \frac{(1-\alpha)Ak_t^{\alpha}(u_t h_t)^{-\alpha}}{B} B(1-u_t)h_t$$

$$= Ak_t^{\alpha}(u_t h_t)^{1-\alpha}\left(1+\frac{(1-\alpha)(1-u_t)}{u_t}\right)$$

Las ecuaciones de optimalidad del equilibrio competitivo se resumen en las siguientes:

La restricción de recursos de la economía:

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = Ak_t^{\alpha-1}(u_t h_t)^{1-\alpha} - \delta - \frac{c_t}{k_t} \tag{10}$$

De (6) y (9) se obtiene la condición de Euler:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\theta}\left[\alpha A k_t^{\alpha-1}(u_t h_t)^{1-\alpha} - \delta - \rho\right] \tag{11}$$

De (2) se obtiene la tasa de crecimiento del capital humano:

$$\frac{\dot{h}_t}{h_t} = B(1-u_t) - \delta_h \tag{12}$$

Sustituyendo (8) en (4) y derivando respecto del tiempo:

$$\frac{\dot{\lambda}_{1,t}}{\lambda_{1,t}} - \frac{\dot{\lambda}_{2,t}}{\lambda_{2,t}} = -\alpha\frac{\dot{k}_t}{k_t} + \alpha\left(\frac{\dot{u}_t}{u_t} + \frac{\dot{h}_t}{h_t}\right);$$

Usando esta ecuación junto con (3), (7), (10) y (12), y, sin pérdida de generalidad, suponiendo $\delta = \delta_h$, se obtiene la tasa de crecimiento del tiempo dedicado a trabajar en el sector del bien final:

$$\frac{\dot{u}_t}{u_t} = \frac{1-\alpha}{\alpha}B + B\,u_t - \frac{c_t}{k_t} \tag{13}$$

Las ecuaciones dinámicas (10)-(13) determinan la evolución de esta economía en el equilibrio competitivo, junto con las condiciones de transversalidad.

4. El estado estacionario o la senda de crecimiento equilibrada (*Balanced Growth Path*)

El estado estacionario o el *Balanced Growth Path (BGP)* es una situación en la cual las variables $\{c_t, k_t, h_t\}$ crecen a una tasa constante y la variable u_t es constante.

Primero vamos a mostrar que todas las variables con crecimiento no nulo en el BGP crecen a la misma tasa:

Definimos $\gamma_{x,t} \equiv \dfrac{\dot{x}_t}{x_t}$, para $x = c, k, h, y$; $\gamma_x^* \equiv \left(\dfrac{\dot{x}_t}{x_t}\right)_{BGP}$; $u_{BGP} = u^*$.

De la ecuación (11), evaluada en el BGP, se tiene que:

$$\gamma_{\mathrm{c}}^* = \frac{1}{\theta}\left[\alpha A\left(\frac{k_t}{h_t}\right)^{\alpha-1}\left(u^*\right)^{1-\alpha} - \delta - \rho\right] \Rightarrow \left(\frac{k_t}{h_t}\right)_{\mathrm{BGP}} \text{ debe ser constante}$$

$$\Rightarrow \gamma_k^* = \gamma_h^*.$$

De la ecuación (10), evaluada en el BGP, se tiene que:

$$\gamma_k^* = A\left(\frac{k_t}{h_t}\right)_{BGP}^{\alpha-1}\left(u^*\right)^{1-\alpha} - \delta - \left(\frac{c_t}{k_t}\right) \Rightarrow \left(\frac{c_t}{k_t}\right)_{\mathrm{BGP}} \text{ debe ser constante}$$

$$\Rightarrow \gamma_c^* = \gamma_k^*.$$

El ratio output/capital físico es constante en el BGP, ya que es igual a $\left(\dfrac{k_t}{h_t}\right)_{BGP}^{\alpha-1}\left(u^*\right)^{1-\alpha}$, que ya hemos mostrado que es constante; por tanto, también el output crecerá a la misma tasa que el capital físico. En definitiva, $\gamma_c^* = \gamma_k^* = \gamma_h^* = \gamma_y^* = \gamma^*$.

Ahora vamos a computar el BGP, es decir, vamos a determinar $\left\{\gamma^*, u^*, \left(\dfrac{c_t}{k_t}\right)_{BGP}, \left(\dfrac{k_t}{h_t}\right)_{BGP}, \left(\dfrac{y_t}{k_t}\right)_{BGP}\right\}$ en función de los parámetros estructurales del modelo.

Definimos: $\chi^* \equiv \left(\frac{c_t}{k_t}\right)_{BGP}, \omega^* \equiv \left(\frac{k_t}{h_t}\right)_{BGP}, z^* \equiv \left(\frac{y_t}{k_t}\right)_{BGP}$.

Las ecuaciones (10)-(13) evaluadas en el BGP son:

$$\gamma^* = A(\omega^*)^{\alpha-1}(u^*)^{1-\alpha} - \delta - \chi^* \qquad (10')$$

$$\gamma^* = \frac{1}{\theta}\left[\alpha A(\omega^*)^{\alpha-1}(u^*)^{1-\alpha} - \delta - \rho\right] \qquad (11')$$

$$\gamma^* = B(1-u^*) - \delta \qquad (12')$$

$$Bu^* = -\frac{1-\alpha}{\alpha}B + \chi^* \qquad (13')$$

Es fácil probar que la solución a este sistema es:

$$u^* = \frac{1}{B\theta}\left[\rho - (B-\delta)(1-\theta)\right] \qquad (14)$$

$$\gamma^* = \frac{1}{\theta}\left[B - \delta - \rho\right] \qquad (15)$$

$$\chi^* = \frac{1}{\theta}\left[\rho - (B-\delta)(1-\theta)\right] + \frac{1-\alpha}{\alpha}B \qquad (16)$$

$$\omega^* = \left(\frac{A\alpha}{B}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1}{B\theta}\left[\rho - (B-\delta)(1-\theta)\right] \qquad (17)$$

Es directo probar, dada la definición de z^*, que su valor de estado estacionario es:

$$z^* = B/\alpha \qquad (18)$$

5. La dinámica de transición

Sean $\chi_t \equiv \dfrac{c_t}{k_t}$; $\omega_t \equiv \dfrac{k_t}{h_t}$; $z_t \equiv \dfrac{y_t}{k_t} = A\omega_t^{\alpha-1}u_t^{1-\alpha}$;

Vamos a resumir en las ecuaciones siguientes la dinámica de esta economía, basada tal dinámica en la evolución temporal de las variables: $\{\chi_t, z_t, u_t\}$. Dado que estas variables son todas variables de control, una vez que hayamos estudiado su evolución dinámica veremos cómo esta evolución depende de la variable de estado ω_t.

Usando las ecuaciones (10) y (11), junto con (16) y (18) se tiene:

$$\frac{\dot{\chi}_t}{\chi_t} = \frac{\dot{c}_t}{c_t} - \frac{\dot{k}_t}{k_t} = \left(z_t - z^*\right)\frac{\alpha-\theta}{\theta} + \left(\chi_t - \chi^*\right) \qquad (19)$$

Usando (10) y (12) junto con (14), (16) y (18):

$$\frac{\dot{\omega}_t}{\omega_t} = \frac{\dot{k}_t}{k_t} - \frac{\dot{h}_t}{h_t} = \left(z_t - z^*\right) - \left(\chi_t - \chi^*\right) + B\left(u_t - u^*\right) \qquad (20)$$

Usando la definición de z_t y las ecuaciones (13) y (20):

$$\frac{\dot{z}_t}{z_t} = (1-\alpha)\left(\frac{\dot{u}_t}{u_t} - \frac{\dot{\omega}_t}{\omega_t}\right) = -(1-\alpha)\left(z_t - z^*\right) \qquad (21)$$

De la ecuación (13) junto con (14) y (16):

$$\frac{\dot{u}_t}{u_t} = B\left(u_t - u^*\right) - \left(\chi_t - \chi^*\right) \qquad (22)$$

El sistema dado por (19), (21) y (22) define el comportamiento dinámico de $\{\chi_t, z_t, u_t\}$. Veamos cómo es este comportamiento (sólo estudiamos el caso $\alpha < \theta$):

De (21) podemos obtener la evolución dinámica de z_t independientemente de las otras dos variables ya que sólo aparece dicha variable en esta ecuación. Por tanto, si conociéramos el valor inicial del ratio output capital (z_0), la solución a (21) sería:

$$\frac{z_t - z^*}{z_t} = \frac{z_0 - z^*}{z_0} e^{-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)Bt} \Rightarrow z_t = \frac{z^*}{1 - \frac{z_0 - z^*}{z_0} e^{-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)Bt}} \qquad (23)$$

Demostración:

$$\frac{\dot{z}_t}{z_t} = -(1-\alpha)\left(z_t - z^*\right) \;\Rightarrow \frac{1}{z_t\left(z_t - z^*\right)}dz_t = -(1-\alpha)dt$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int \frac{1}{z_t\left(z_t - z^*\right)}dz_t}_{LHS} = \underbrace{\int -(1-\alpha)dt}_{RHS}$$

$$LHS = \int \frac{1}{z_t\left(z_t - z^*\right)}dz_t = \int \left(\frac{-1/z^*}{z_t} + \frac{1/z^*}{\left(z_t - z^*\right)}\right)dz_t$$

$$= \left[-(1/z^*)\ln z_t + (1/z^*)\ln\left(z_t - z^*\right)\right] + C_1$$

$$= (1/z^*)\ln\left(\frac{z_t - z^*}{z_t}\right) + C_1$$

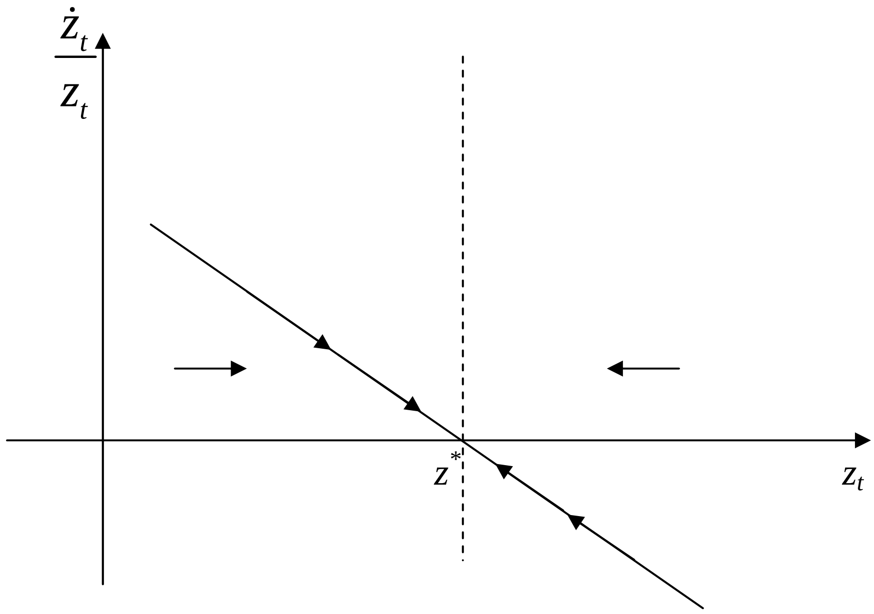
$$RHS = \int -(1-\alpha)dt = -(1-\alpha)t + C_2$$

Por tanto, $\ln\left(\frac{z_t - z^*}{z_t}\right)_1 = -(1-\alpha)z^* t + C_3 \Rightarrow \frac{z_t - z^*}{z_t} = C\, e^{-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)Bt}$.

Si evaluamos la solución en t=0 tenemos que $C = \frac{z_0 - z^*}{z_0}$.

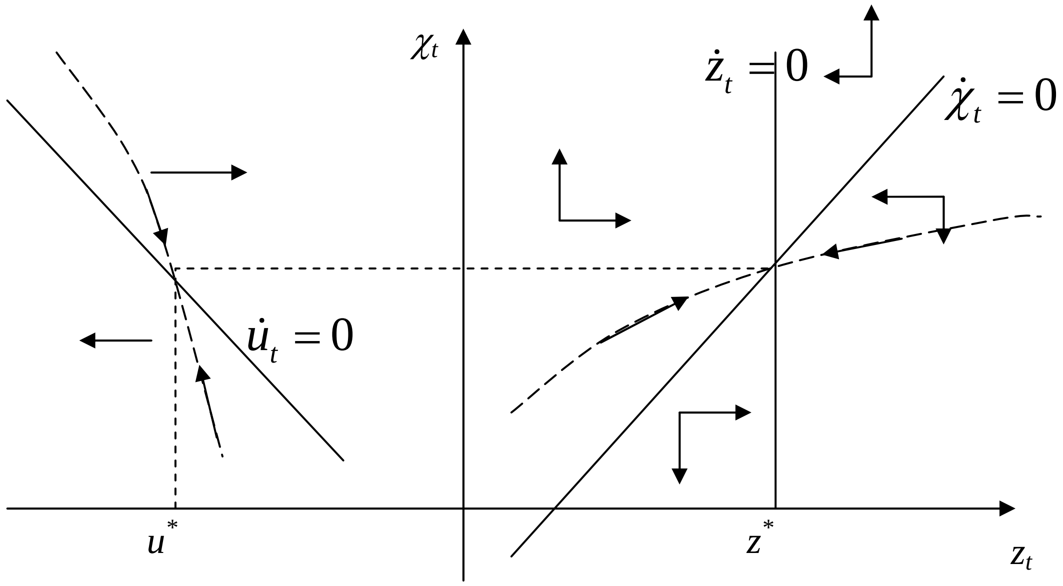
Así pues, la solución es: $\frac{z_t - z^*}{z_t} = \frac{z_0 - z^*}{z_0} e^{-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)Bt}$.

El siguiente gráfico nos ayuda a estudiar la dinámica de esta variable:



En este gráfico podemos observar que si $z_0 < (>) z^* \Rightarrow z_t \uparrow (\downarrow)$.

El siguiente diagrama de fases nos ayudará a entender la dinámica de χ_t y de u_t:



$$\dot{\chi}_t = 0 \Rightarrow \chi_t = \frac{\theta - \alpha}{\theta}(z_t - z^*) + \chi^*$$

$$\dot{z}_t = 0 \Rightarrow z_t = z^*$$

$$\dot{u}_t = 0 \Rightarrow u_t = u^* + \frac{1}{B}(\chi_t - \chi^*)$$

De estos gráficos es directo deducir que:

$$\text{Si } z_0 > z^* \Rightarrow \begin{cases} z_t \downarrow \\ \chi_0 > \chi^* \Rightarrow \chi_t \downarrow \Rightarrow u_0 > u^* (u_t \downarrow) \end{cases}$$

Ahora vamos a relacionar la variable de estado (ω_t) con las de control:

De (19) y (22):

$$\frac{\dot{\omega}_t}{\omega_t} = \frac{\alpha}{\theta}(z_t - z^*) - \gamma_\chi + B(u_t - u^*);$$

Por tanto, si $z_t > z^*$ esto sólo es posible si $\frac{\dot{\omega}_t}{\omega_t} > 0,$ es decir, si $\omega_0 < \omega^*$.

En definitiva, si $\omega_0 < (>)\omega^* \Rightarrow \begin{cases} z_0 > (<) z^* \\ \chi_0 > (<) \chi^* \\ u_0 > (<) u^* \end{cases}.$

La dinámica para el resto de las variables del modelo pueden deducirse de igual modo y queda como ejercicio.

6. La solución del planificador

El problema del planificador es el siguiente:

$$\underset{\{c_t, u_t\}}{Max} \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt, \quad \rho > 0, \theta > 0$$

sujeto a: $\quad c_t + \dot{k}_t + \delta k_t = A k_t^\alpha \left(u_t h_t\right)^{1-\alpha}$

$\dot{h}_t = B(1-u_t)h_t - \delta_h h_t$

dados k_0, h_0

Queda como ejercicio mostrar que la solución del planificador también resuelve el equilibrio competitivo.